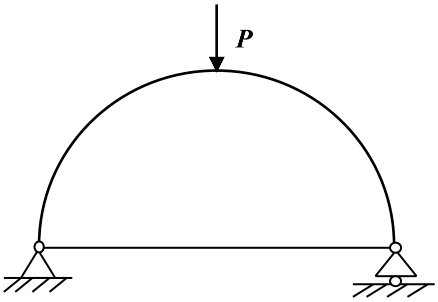
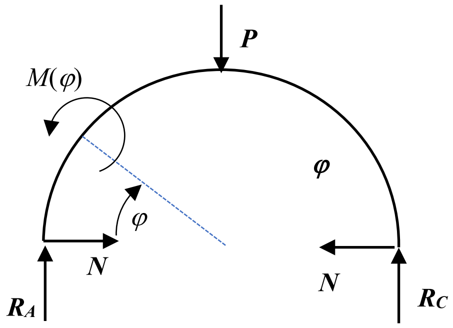
Problème1

1. Introduction





Le système est hyperstatique (intérieur) d'ordre 1, car le tirant ne peut transmettre qu'un effort de traction : $k = m + p - 2\,n$ = 2 (barres) + 3 (ddl bloqués) – 2 x 2 (nœuds) = 1

2. Equilibre des forces et des moments

$$\sum F\;:\; R_A + R_C = P$$

$$\sum M_B\;:\; R_A R = R_C R$$

$$R_A = R_C = P/2$$

3. Moment de flexion en fonction de l'angle

$$\sum M_\varphi\;:\; M(\varphi) = R_A(R - R\cos\varphi) - N\,R\sin\varphi \qquad \text{pour} \qquad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\partial M(\varphi)}{\partial N} = -\,R\sin\varphi$$

4. Energie de déformation en flexion et en traction dans le tirant

$$dU = \frac{M^2}{2EI}dx$$

$$dU = \frac{N^2}{2EF}dx$$

5. Menabrea : $\frac{\partial U}{\partial N} = 0$

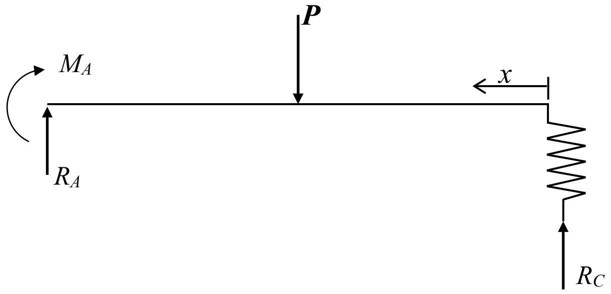
$$\frac{2}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}} M\frac{\partial M}{\partial N}Rd\varphi + \frac{1}{EF}\int_0^{2R} N dx = 0$$

Et finalement

$$N = P\frac{1}{\pi + \frac{4I}{R^2F}} \quad N = P\frac{1}{\pi + \frac{4I}{R^2F}}$$

Problème 2

1. Schéma et équilibre statique



$\sum F$: $R_A + R_C = P$ $\qquad$ $R_A = P - R_C$

$\sum M_D$: $M_A + R_A \frac{\ell}{2} = R_C \frac{\ell}{2}$ $\qquad$ $M_A = \frac{\ell}{2}(2R_C - P)$

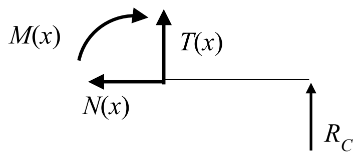
Le déplacement au point C étant nul, on peut appliquer le théorème de Menabrea, à condition de considérer l'énergie totale du système, y compris celle du ressort : $U = U_b + U_R$

$$\frac{\partial U}{\partial R_C} = \frac{\partial U_b}{\partial R_C} + \frac{\partial U_R}{\partial R_C}$$

2. Moment de flexion

$0 \leq x \leq \ell/2$

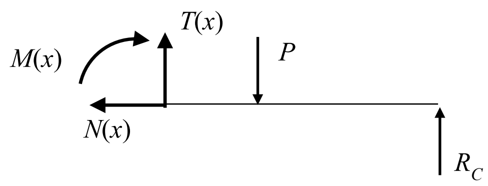
$$M(x) = R_C\, x$$



$0 \leq x \leq \ell/2$

$$M(x) = R_C\, x + P\left(\frac{\ell}{2} - x\right)$$

$$= x(R_C - P) + \frac{\ell P}{2}$$



3. Energie de déformation $U = U_b + U_R$

$$U_b = \frac{M_f^2}{2\,EI}$$

$$U_R = \frac{1}{2}\delta R_C = \frac{R_C^2}{2k}$$

4. Application du théorème de Menabrea

$$\frac{\partial U}{\partial R_C} = \frac{\partial U_b}{\partial R_C} + \frac{\partial U_R}{\partial R_C} = \frac{R}{EI}\int_0^{\frac{\ell}{2}} x^2 dx + \frac{1}{EI}\int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} \left(xR - \left(x - \frac{\ell}{2}\right)P\right) x dx + \frac{R}{k} = 0$$

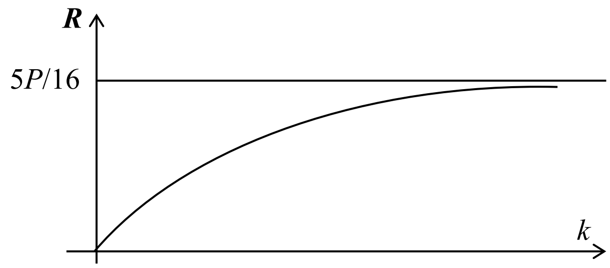
Et donc

$$\frac{\partial U}{\partial R_C} = \frac{R\ell^3}{3EI} - \frac{5P\ell^3}{48EI} + \frac{R}{k} = 0$$

5. Représentation de la fonction

$$R_C = \frac{5P}{16}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{k}\cdot\frac{3EI}{\ell^3}}\right) = \frac{5P\ell^3}{16}\frac{k\ell^3}{k\ell^3+3\,EI}$$

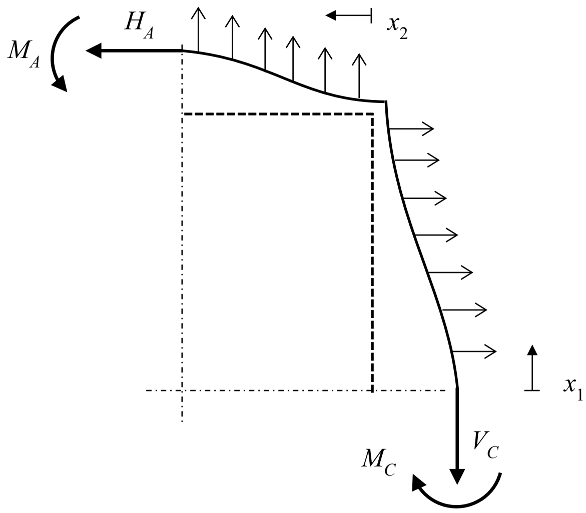
$R_C(k=0) = 0$ et $R_C(k=\infty) = \frac{5P}{16}$



Problème 3

1. Schéma et équilibre statique :

   Pour la double symétrie, le système est hyperstatique d'ordre $k = 3 - 2 = 1$



$$\sum F_H : H_A = q\,b$$

$$\sum F_V : V_C = q\,a$$

$$M_C = hyperstatisme$$

2. Tronçon CB de $0 \leq x_1 \leq b$

$$M(x) = M_C - q\frac{x_1^2}{2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial M_C} = 1$$

3. Tronçon BA de $0 \leq x_2 \leq a$

$$M(x) = M_C - q\frac{b^2}{2} + V_0 x_2 - q\frac{x_2^2}{2} = M_C - q\frac{b^2}{2} + qax_2 - q\frac{x_2^2}{2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial M_C} = 1$$

4. Application de Menabrea

$$\alpha_C = \frac{\partial U}{\partial M_C} = \frac{1}{EI}\int_0^b M\frac{\partial M}{\partial M_C}dx_1 + \frac{1}{EI}\int_0^a M\frac{\partial M}{\partial M_C}dx_2 = 0$$

   Et donc

$$M_C = \frac{q}{6}(b^2 - 2a^2 + 2ab)$$

5. Représentation des diagrammes des efforts intérieurs

Application numérique :

$M_C = 1083{,}3$ Nm
$M_B = -1166{,}7$ Nm
$M_A = -166{,}7$ Nm